Sztuczna inteligencja

Logika rozmyta 2

Symboliczny zapis zbioru rozmytego

Zbiór rozmyty może być formalnie zapisany na dwa sposoby w zależności od tego z jakim typem przestrzeni elementów mamy do czynienia:

- Jeśli X jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x)}{x}$$

- Jeśli X jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów:

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x}$$

Symboliczny zapis zbioru rozmytego – przykład

- Dla przestrzeni dyskretnej (skończonej)

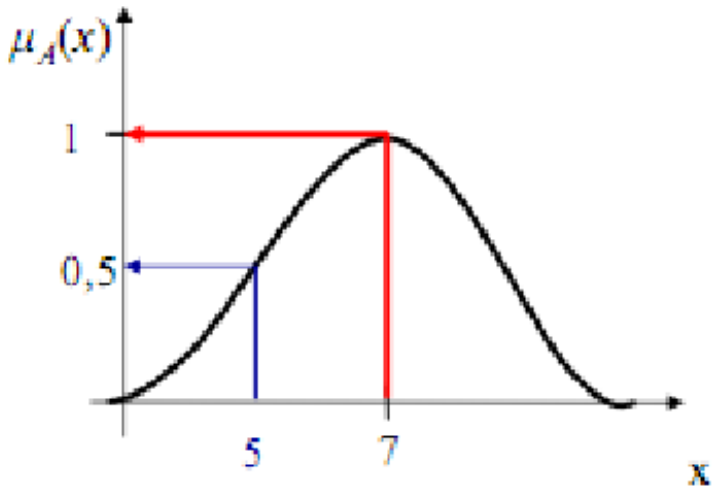
Niech X = N będzie zbiorem liczb naturalnych. Określmy zbiór rozmyty przedstawiający liczby bliskie siódemki:

$$A = \left\{\frac{0.2}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.8}{8} + \frac{0.5}{9} + \frac{0.2}{10}\right\}$$

- Dla przestrzeni ciągłej (nieskończonej)

Niech X = R będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Zbiór liczb rzeczywistych bliskich liczbie 7 zostanie zdefiniowany za pomocą następującej funkcji przynależności:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x-7)^2}$$



Parametry charakteryzujące zbiory rozmyte

- Nośnik (baza) zbioru rozmytego A [ozn. supp(A)] to zbiór elementów dla których wartość funkcji przynależności jest większa od zera:

$$supp(A) = \{x \in X: \mu_A(x) > 0\}$$

- Jądro zbioru rozmytego A [ozn. core(A)] to zbiór elementów, dla których wartość funkcji przystosowania jest równa jeden:

$$core(A) = \{x \in X: \mu_A(x) = 1\}$$

- α-przekrój zbioru rozmytego A to zbiór nierozmyty dla którego zachodzi:

$$A_\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\} \ dla\ \alpha \in [0;1]$$

- wysokość (ang. *height*) zbioru rozmytego A – czyli największa wartość funkcji przynależności w obrębie tego zbioru:

$$height(A) = \sup\{\mu_A(x) | x \in X\}$$

Parametry charakteryzujące zbiory rozmyte – przykład

Niech X = {1, 2, …, 10} będzie zbiorem liczb naturalnych od 1 do 10. Ponadto niech będzie określony dla tej dziedziny następujący zbiór rozmyty:

$$A = \left\{\frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{0.6}{10}\right\}$$

- Wybrane α-przekroje dla tego zbioru są następujące:

$$A_0 = X = \{1, 2, \ldots, 10\}$$
$$A_{0.1} = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$$
$$A_{0.3} = \{4, 5, 8, 9, 10\}$$
$$A_{0.7} = \{5, 8, 9\}$$

- Jądro zbioru:

  core(A) = {8, 9}

- Baza zbioru:

  supp(A) = {2, 4, 5, 8, 9, 10}

- Wysokość zbioru

  height(A) = 1

Ćwiczenia

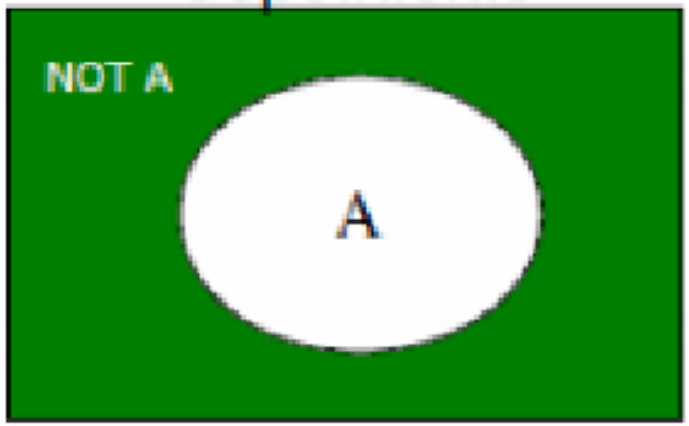
- Załóżmy, że chcemy rozważać liczbę naturalną bliską wartości 9. Jeśli rozważymy następujący zbiór rozmyty

$$A = \left\{ \frac{0.2}{6} + \frac{0.5}{7} + \frac{0.8}{8} + \frac{1}{9} + \frac{0.7}{10} + \frac{0.4}{11} \right\}$$

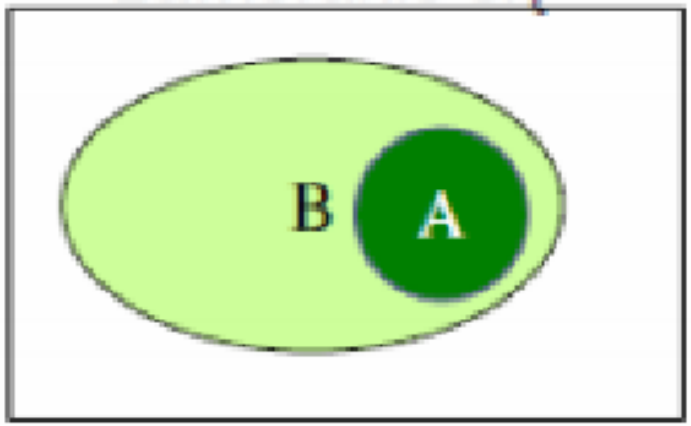
- Odpowiedz na następujące pytania:
  - Jaka będzie wysokość zbioru rozmytego height(A) = … ?
  - Wskaż nośnik zbioru support(A) = {…}
  - Wskaż jądro (rdzeń) zbioru core(A) = {…}
  - Wyznacz liczność zbioru card(A) = …
  - Wyznacz α-przekroje dla wartości parametru α równych 0, 0.5, 0,8.

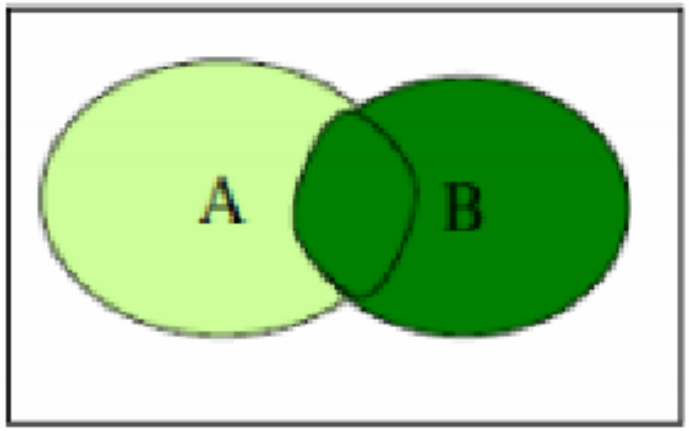
Operacje na zbiorach rozmytych

dopełnienie

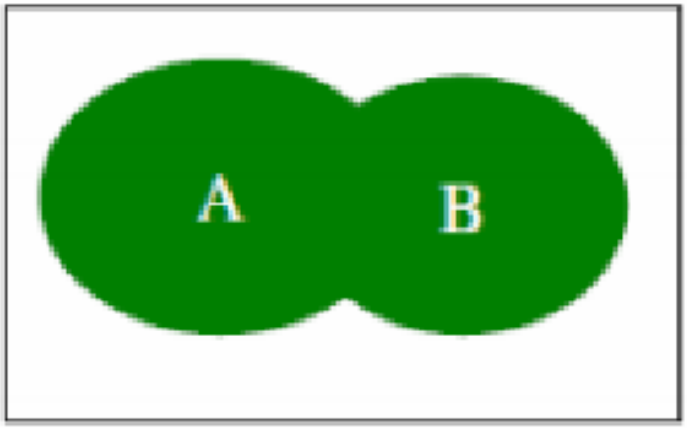


zawieranie się





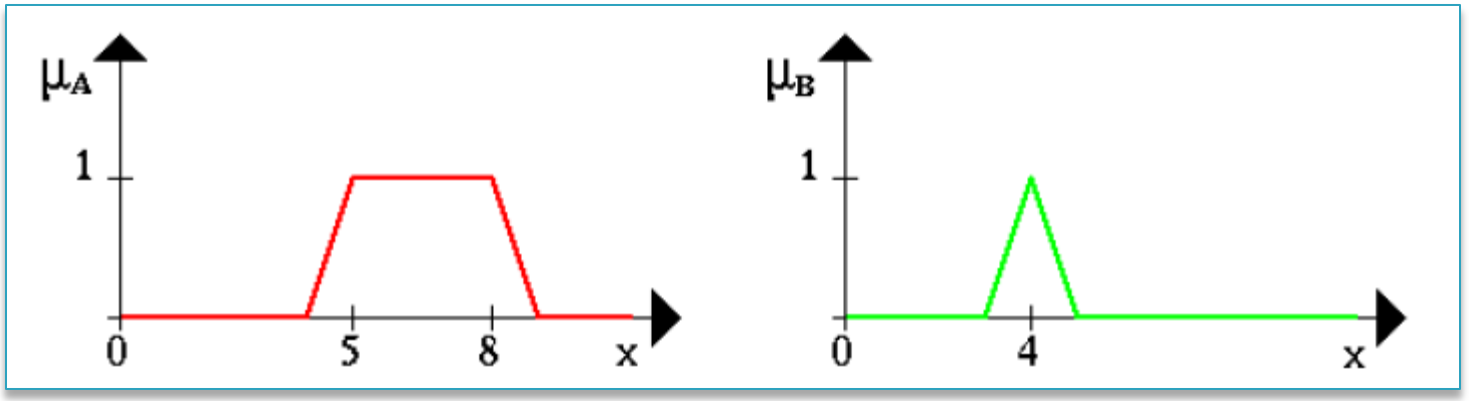
przecięcie



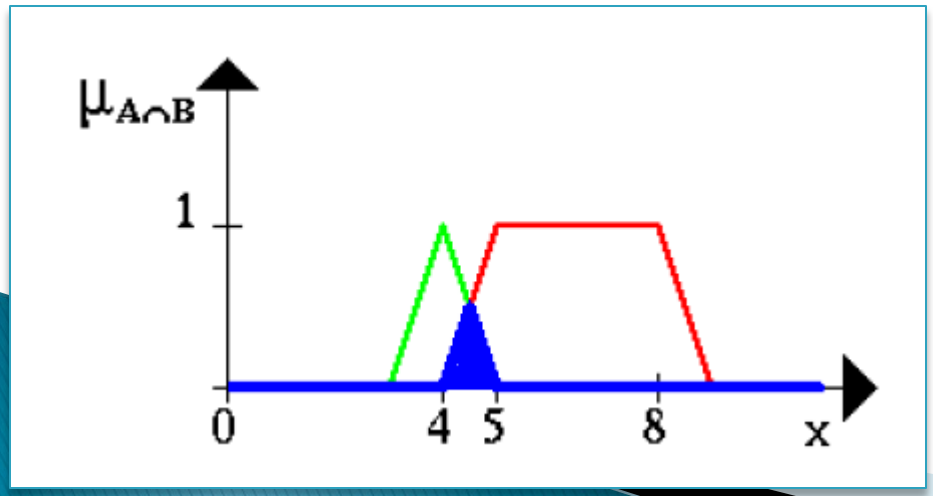
unia

Operacje na zbiorach rozmytych c.d.

Niech A będzie zbiorem rozmytym symbolizującym przedział liczb [5-8].
Niech B będzie zbiorem rozmytym symbolizującym liczby bliskie czwórki.



- Iloczyn zbiorów

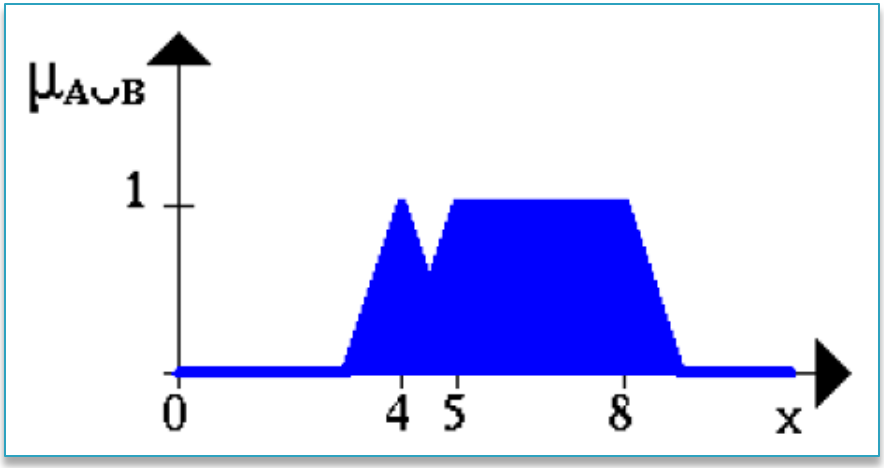


Iloczyn zbiorów A i B jest zbiorem rozmytym C = A ∩ B o funkcji przynależności:

$$\mu_c(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Operacje na zbiorach rozmytych c.d.

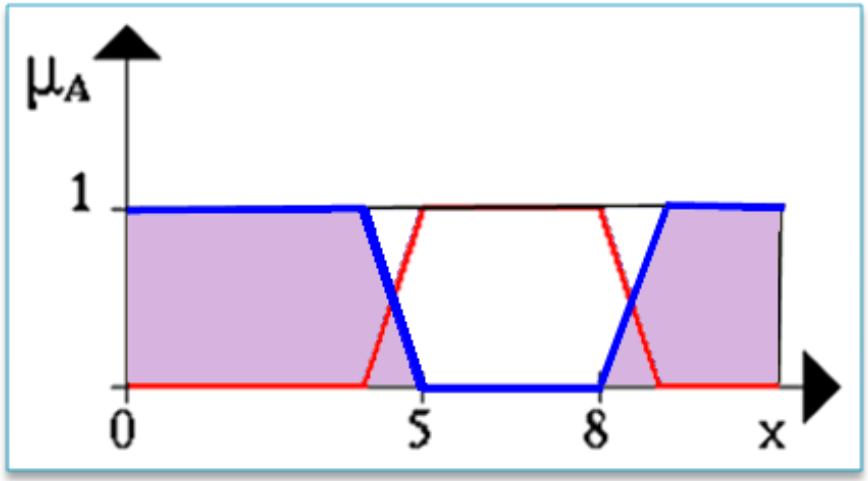
- Suma zbiorów



Suma zbiorów A i B jest zbiorem rozmytym C = A ∪ B o funkcji przynależności:

$$\mu_c(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- Negacja zbioru



Negacja zbioru B jest zbiorem rozmytym C = ~B o funkcji przynależności:

$$\mu_c(x) = 1 - \mu_b(x)$$

Ćwiczenia

- Pobierz plik znajdujący się pod adresem:

http://www.tomaszx.pl/materialy/si_lab2_zad3456.pdf

oraz wykonaj zadania 3 – 6.

W realizacji zadania 4 pomocne mogą być funkcje:

MIN(start: koniec) – wartość minimalna z przedziału

MAX(start: koniec) – wartość maksymalna z przedziału

Proszę również pamiętać o adresacji bezwzględnej (**A1**)

Po ich prawidłowym wykonaniu pochwal się prowadzącemu ☺.

- Następnie plik znajdujący się pod adresem:

http://www.tomaszx.pl/materialy/si_lab3_zad712.pdf

oraz wykonaj zadania 7 – 12.

Reguły rozmyte

- Reguły w logice klasycznej mogą być przedstawione w formie:

IF x = a THEN y = b

IF temperatura = 40 THEN obroty_wiatrak = 2000

- Reguły w logice rozmytej przyjmują natomiast postać:

IF (x jest A) THEN (y jest B)

IF temperatura jest ciepło THEN obroty_wiatrak są wysokie

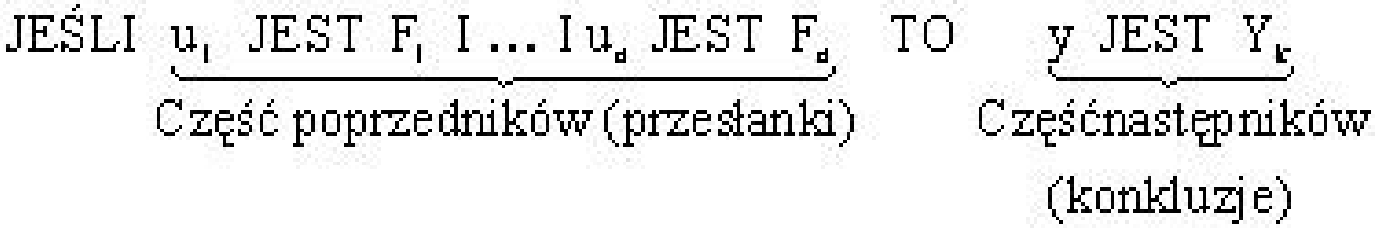
Gdzie:

x, y – zmienne lingwistyczne.

A, B – zbiory rozmyte reprezentujące wartości zmiennych x, y.

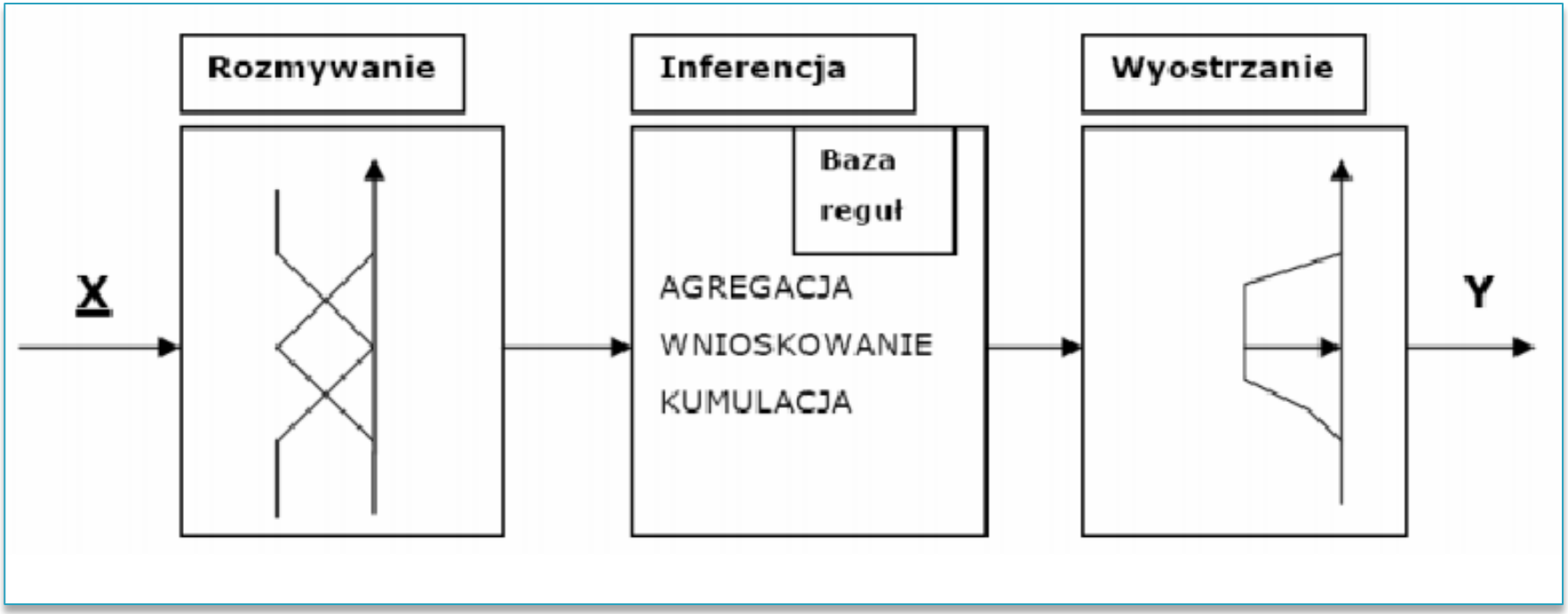
Schemat wnioskowania

- ***Rozmywanie (fuzyfikacja)*** – operacja przekształcająca sygnały wejściowe z dziedziny ilościowej na wielkości jakościowe reprezentowane przez zbiory rozmyte na podstawie określających je funkcji przynależności.
- ***Wnioskowanie rozmyte*** – operacja wyznaczania w dziedzinie jakościowej wartości wyjść na podstawie wejść za pomocą zbioru reguł rozmytych.
- ***Baza reguł*** – reprezentuje wiedzę jakościową o systemie w postaci zbioru reguł rozmytych w postaci wyrażeń **jeśli-to**. Mają one zazwyczaj postać:



- ***Wyostrzanie (defuzyfikacja)*** – operacja przekształcająca sygnały wyjściowe systemu z dziedziny jakościowej na ilościową.

Wnioskowanie rozmyte



Przykład:

Przed rozmyciem: Prędkość samochodu = 150 km/h.

Po rozmyciu – FAKT: Prędkość samochodu jest „duża".

Reguła: IF prędkość samochodu jest „bardzo duża" THEN poziom hałasu jest „wysoki".

Wniosek: Poziom hałasu w samochodzie jest „średnio wysoki".

Po wyostrzeniu: Poziom hałasu = 60 dB.

Typy wnioskowania rozmytego

Najpopularniejsze są dwa typy wnioskowania:

1. Typu Mamdani – nie jest korzystne obliczeniowo, ponieważ należy wyznaczać centra dwuwymiarowych figur.
2. Typu Sugeno – Stosuje pojedyncze wartości (singeltony) jako funkcje przynależności znalezionych konsekwencji. Mają one wartości różne od zera tylko w jednym punkcie.

Mamdami	Sugeno
· Jest intuicyjny · Metoda szeroko wykorzystywana i akceptowana · Dobrze dopasowana do wejść opisywanych przez człowieka	· Efektywny obliczeniowo · Pracuje poprawnie z technikami liniowymi · Jest wydajny dla technik optymalizacji i adaptacji · Gwarantuje ciągłość płaszczyzny wyjściowej · Dopasowany do analiz matematycznych

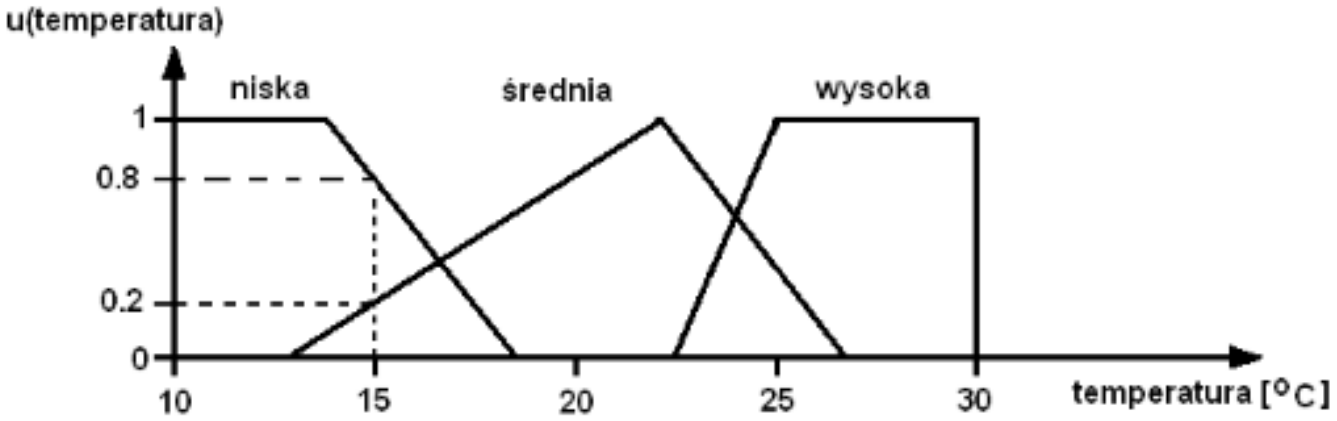
Wnioskowanie Mamdani

Interpretacja reguł rozmytych składa się z dwóch pod-etapów:

- W pierwszym etapie realizowany jest proces **obliczania mocy reguł. W tym celu dla każdej zmiennej w przesłankach reguły** wyznaczane są stopnie przynależności do odpowiedniego zbioru rozmytego. Jeśli moc reguły jest zerowa, wówczas uznaje się, że nie nastąpiła aktywacja reguły. Jednocześnie wyznaczany jest zbiór rozmyty będący rezultatem uaktywnienia reguły. Zależy on od kształtu odpowiedniej funkcji przynależności oraz obliczonej mocy reguły.
- W drugim etapie następuje **agregacja aktywnych reguł. Polega** ona na sumowaniu rozmytych zbiorów wynikowych ze wszystkich reguł. Otrzymany w ten sposób zbiór rozmyty jest zbiorem wynikowym wnioskowania rozmytego.
- Wynikiem wnioskowania jest zbiór rozmyty.

Rozmywanie przykład

- Rozmycie wartości wejściowej dla zmiennej lingwistycznej temperatura = 15 stopni C.



- W wyniku rozmycia otrzymano wartości funkcji przynależności do 3 zbiorów (niska, średnia, wysoka) równe:

$$\mu_{niska}(15) = 0.8$$
$$\mu_{średnia}(15) = 0.2$$
$$\mu_{wysoka}(15) = 0$$

Baza reguł

- Załóżmy, że nasza baza reguł wygląda następująco:

R1: Jeśli temperatura = niska To ogrzewanie = duże
R2: Jeśli temperatura = średnia To ogrzewanie = średnie
R3: Jeśli temperatura = wysoka To ogrzewanie = niskie

- Badamy które z reguł zawartych w bazie możemy uaktywnić. W tym celu wyznaczamy wartości funkcji przynależności dla wszystkich zmiennych lingwistycznych zawartych w przesłankach reguł.

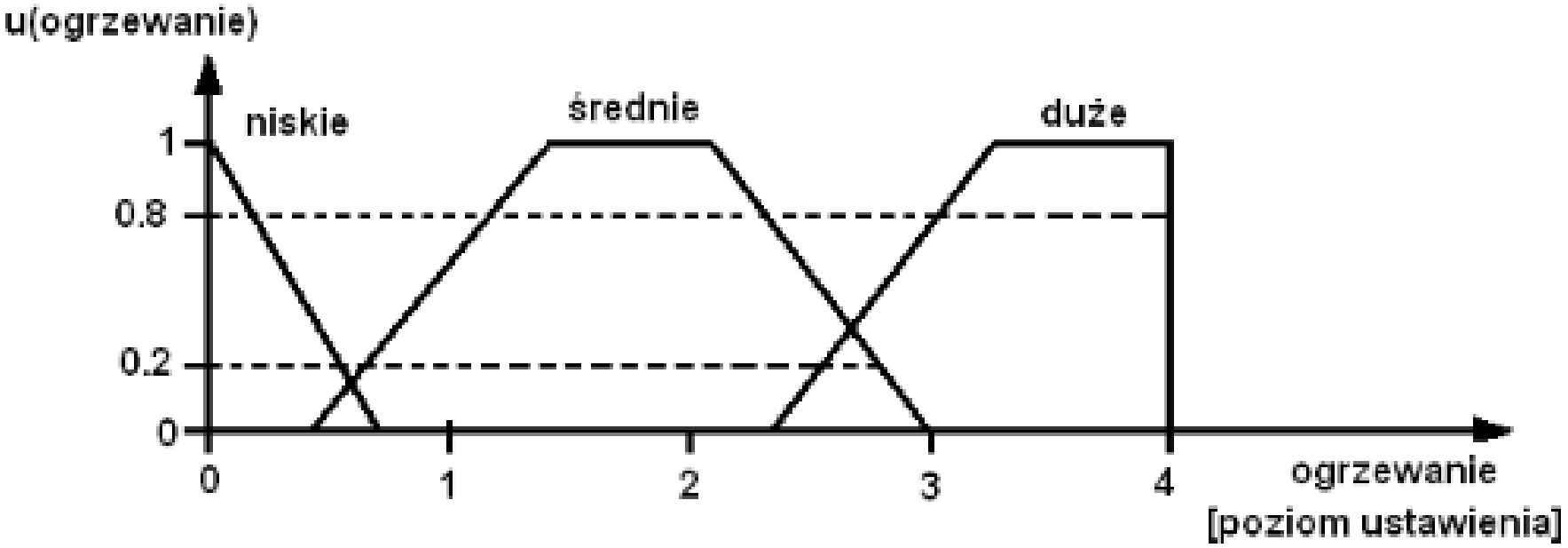
Jako iż przesłanki reguł zawierają tylko jedną zmienną lingwistyczną wyliczenia te, są tożsame z zaprezentowanymi w przykładzie fuzyfikacji:

$$\mu_{niska}(15) = 0.8$$
$$\mu_{średnia}(15) = 0.2$$
$$\mu_{wysoka}(15) = 0$$

Widzimy, że tyko reguły R1 i R2 można uaktywnić.

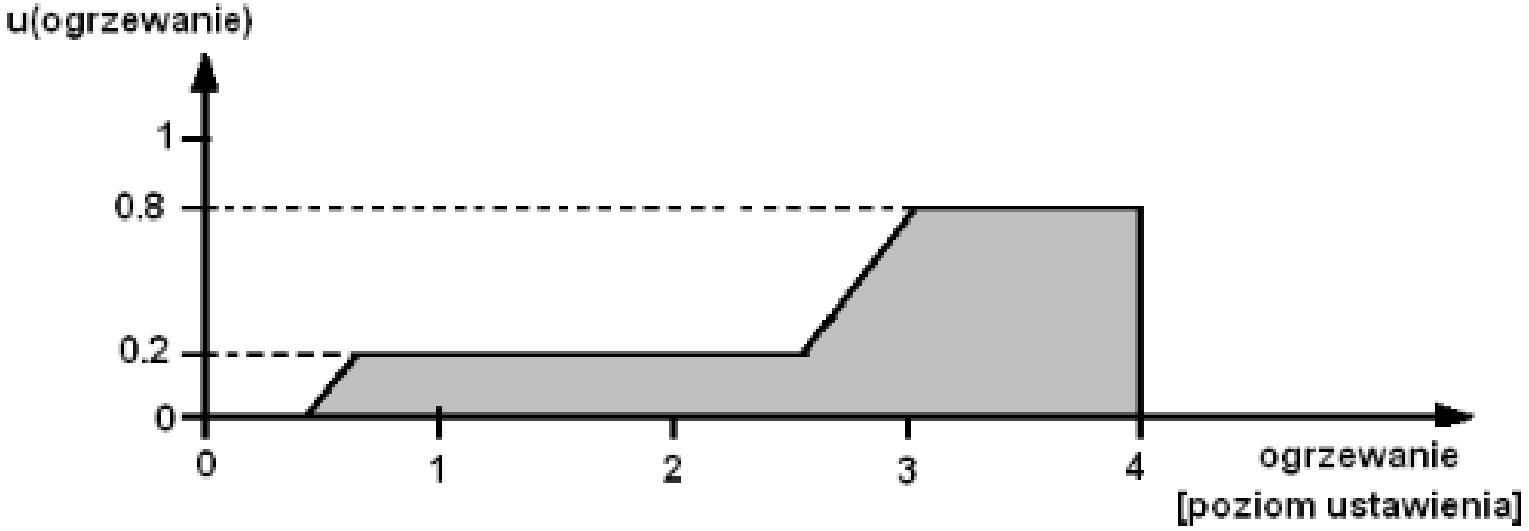
Uruchomienie reguł

- Reguły R1 i R2 zostają uruchomione.
- Odznaczamy na osi rzędnych wyliczone wartości funkcji przystosowania dla poszczególnych zbiorów. Biorąc pod uwagę konkluzje reguł obcinamy dany zbiór rozmyty do poziomu wyznaczanego przez najwyższy stopień przynależności spośród wszystkich reguł uaktywnionych reguł.



Rezultat wnioskowania

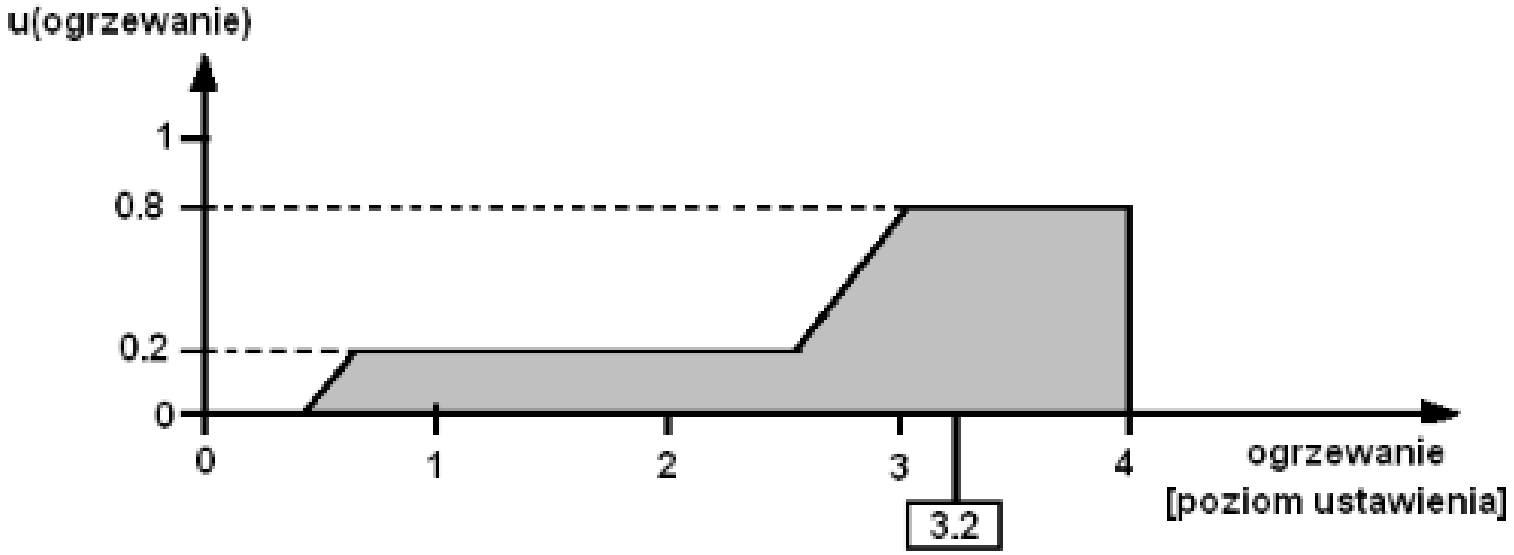
- W wyniku przeprowadzenia wnioskowania (w oparciu o 2 reguły) otrzymujemy następujący wynikowy zbiór rozmyty:



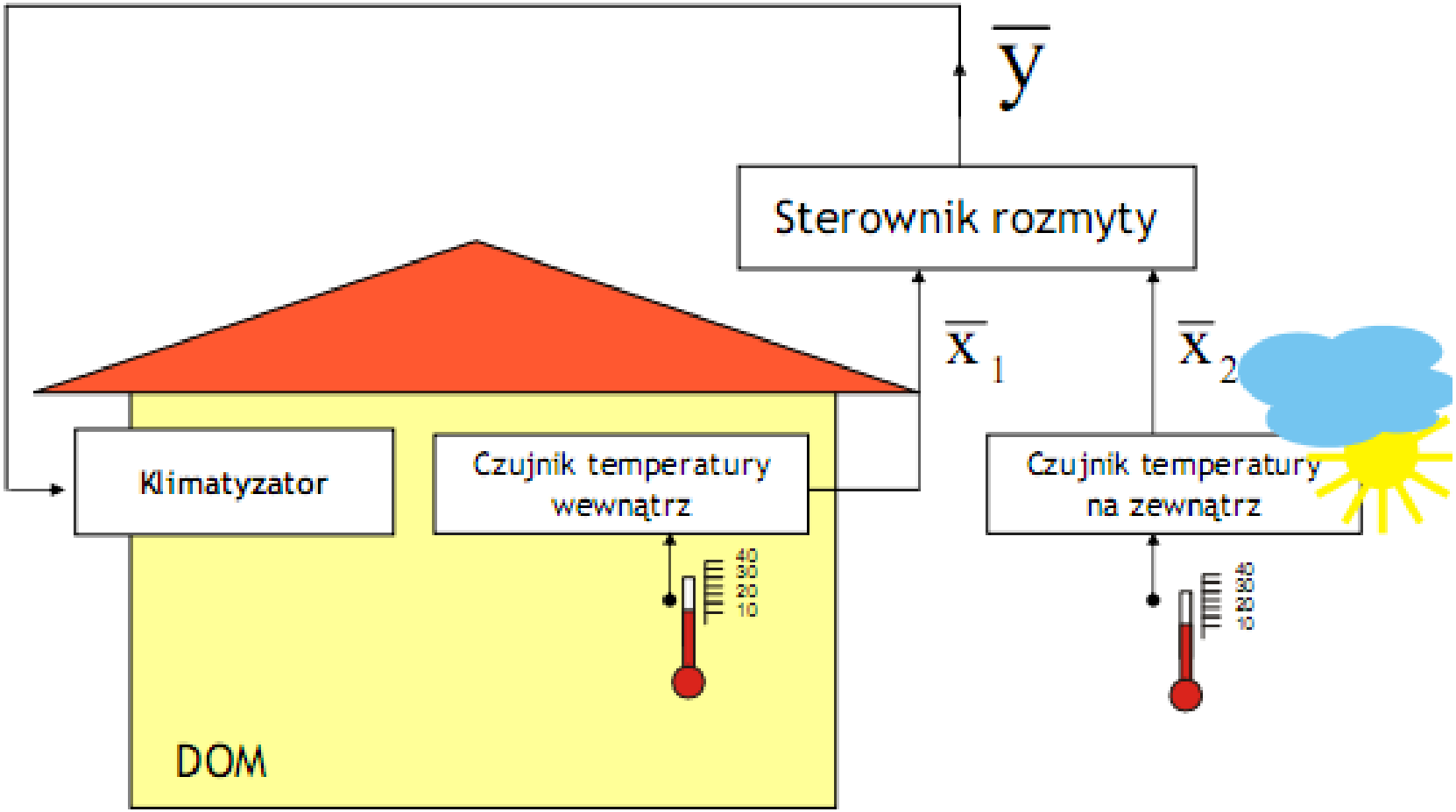
- Jest on sumą odpowiednio obciętych (w wyniku wnioskowania) zbiorów średnie i duże.

Wyostrzanie (defuzyfikacja)

- Wyostrzanie jest przekształceniem odwrotnym do rozmywania, czyli transformacją informacji zawartej w zbiorze rozmytym do postaci pojedynczej wartości (*crisp value).* Przykładowo po zastosowaniu metody środka ciężkości wyznaczono dla zaprezentowanego przykładu wartość wyjściową = 3,2.

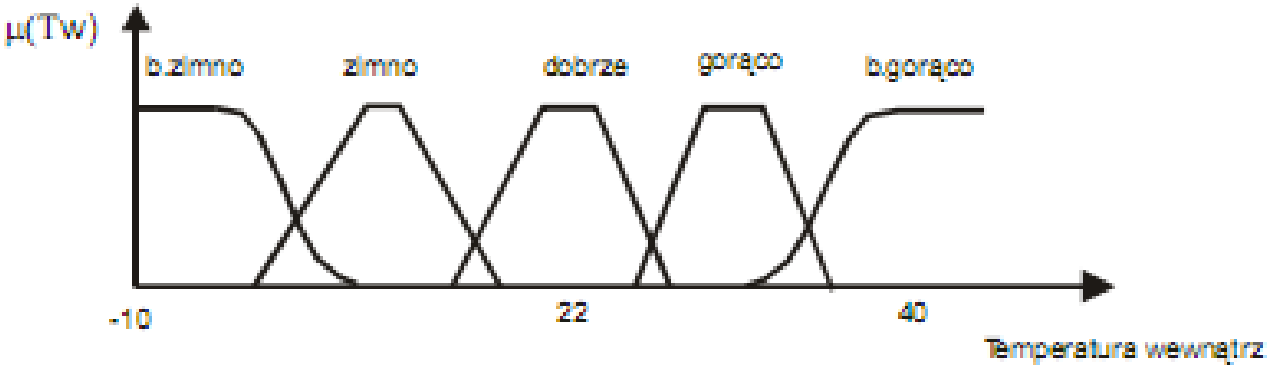


Wnioskowanie przykład 2

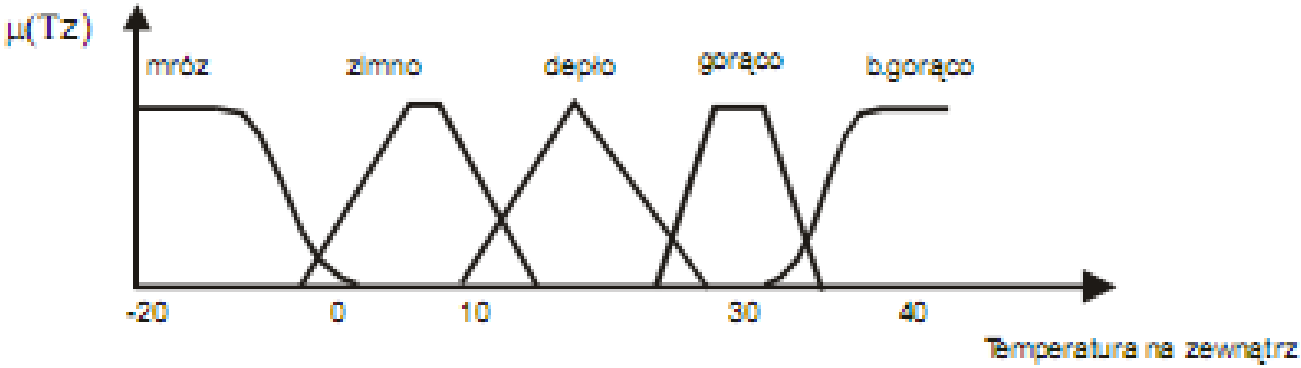


Graficzna reprezentacja zmiennych lingwistycznych w postaci zbiorów rozmytych

$\overline{x}_1$

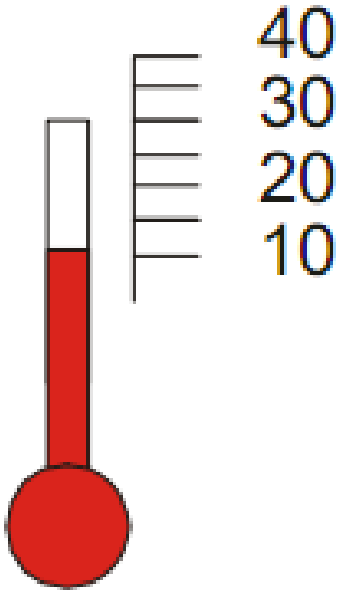


$\overline{x}_2$



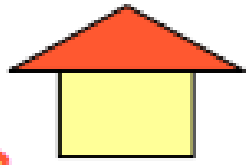
$\overline{y}$

ROZMYWANIE *(fuzzyfikacja)* - operacja przekształcania pojedynczych sygnałów wejściowych (np. liczb) na wielkości jakościowe reprezentujące zbiory rozmyte.



$\overline{x}_1$

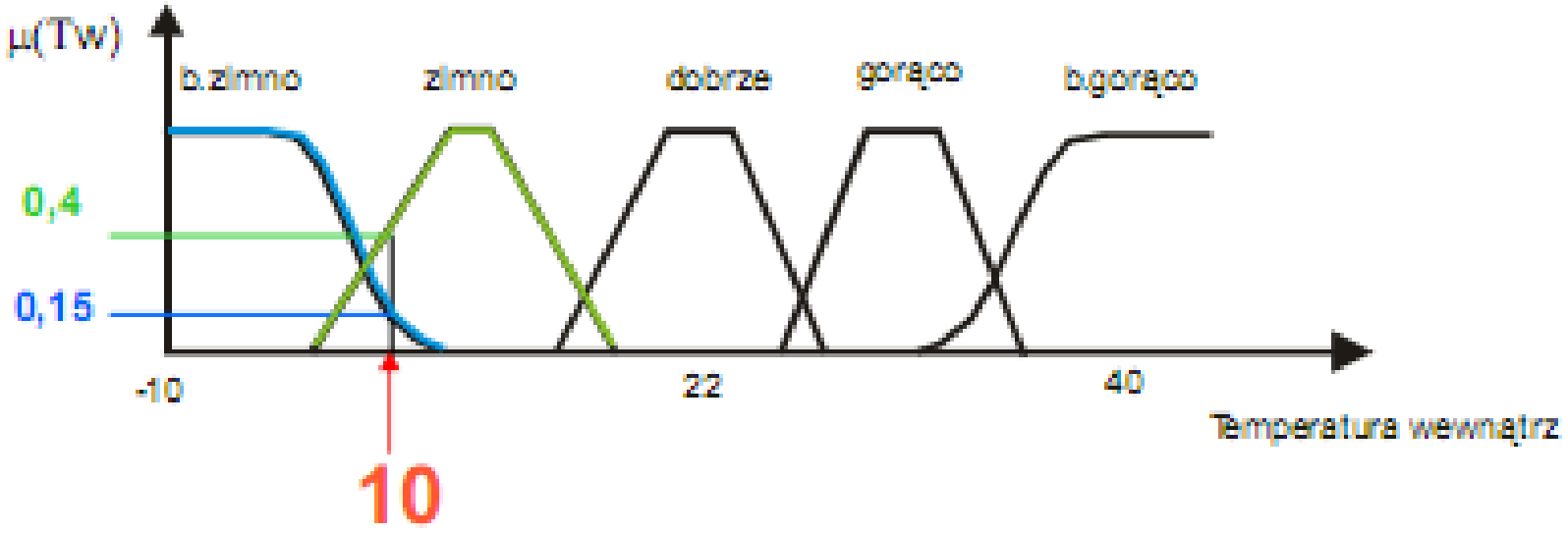
Temperatura wewnątrz domu **=10°C**



$\overline{x}_2$

Temperatura na zewnątrz domu **=11°C**

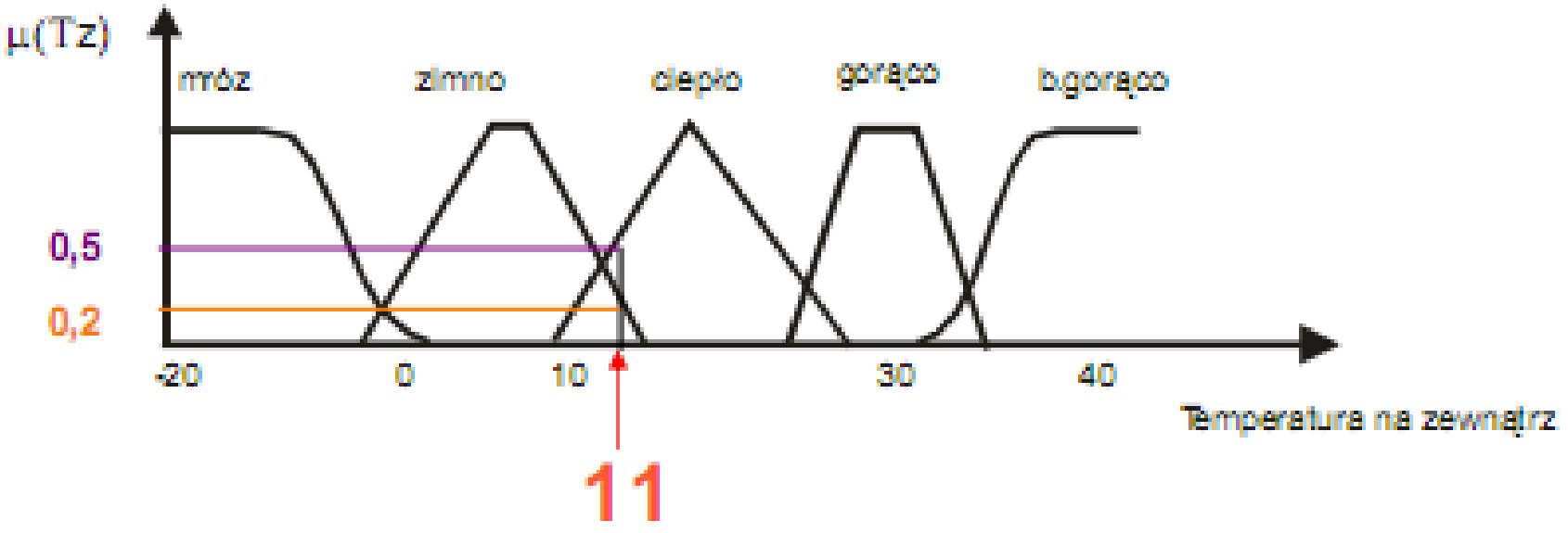
Temperatura wewnątrz domu =10°C



$\mu_{zimno}(Tw=10)=0,4$

$\mu_{b.zimno}(Tw=10)=0,15$

Temperatura na zewnątrz domu **=11°C**

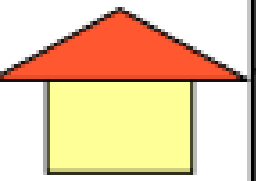


$\mu_{ciepło}(Tz=11)=0,5$

$\mu_{zimno}(Tz=11)=0,2$

Temperatura na zewnątrz domu
Zbiory rozmyte

Temperatura wewnątrz domu
Zbiory rozmyte



	Mróz	Zimno	Ciepło	Gorąco	B.gorąco
B.zimno	Mocne-grzanie	Mocne-grzanie	Grzanie	Grzanie	Wyłącz
Zimno	Mocne-grzanie	Grzanie	Grzanie	Wyłącz	Wyłącz
Dobrze	Grzanie	Wyłącz	Wyłącz	Wyłącz	Chłodzenie
Gorąco	Wyłącz	Wyłącz	Chłodzenie	Chłodzenie	Mocne-chłodzenie
B.gorąco	Wyłącz	Chłodzenie	Chłodzenie	Mocne-chłodzenie	Mocne-chłodzenie

W wyniku procesu *agregacji* przesłanek zawartych w bazie wiedzy reguł 4 z nich otrzymują niezerowe stopnie spełnienia

1. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) **and** (TEMPzewnatrz is mroz)**THEN** (Klimatyzator is mocne-grzanie)
2. IF (TEMPwewnatrz is zimno) **and** (TEMPzewnatrz is mroz)**THEN** (Klimatyzator is mocne-grzanie)
3. IF (TEMPwewnatrz is dobrze) **and** (TEMPzewnatrz is mroz)**THEN** (Klimatyzator is grzanie)
4. IF (TEMPwewnatrz is gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is mroz)**THEN** (Klimatyzator is wyłącz)
5. IF (TEMPwewnatrz is b.gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is mroz)**THEN** (Klimatyzator is wyłącz)
6. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) **and** (TEMPzewnatrz is zimno)**THEN** (Klimatyzator is mocne-grzanie)
7. IF (TEMPwewnatrz is zimno) **and** (TEMPzewnatrz is zimno)**THEN** (Klimatyzator is grzanie)
8. IF (TEMPwewnatrz is dobrze) **and** (TEMPzewnatrz is zimno)**THEN** (Klimatyzator is wyłącz)
9. IF (TEMPwewnatrz is gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is zimno)**THEN** (Klimatyzator is wyłącz)
10. IF (TEMPwewnatrz is b.gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is zimno)**THEN** (Klimatyzator is chłodzenie)
11. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) **and** (TEMPzewnatrz is ciepło)**THEN** (Klimatyzator is grzanie)
12. IF (TEMPwewnatrz is zimno) **and** (TEMPzewnatrz is ciepło)**THEN** (Klimatyzator is grzanie)
13. IF (TEMPwewnatrz is dobrze) **and** (TEMPzewnatrz is ciepło)**THEN** (Klimatyzator is wyłącz)
14. IF (TEMPwewnatrz is gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is ciepło)**THEN** (Klimatyzator is chłodzenie)
15. IF (TEMPwewnatrz is b.gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is ciepło)**THEN** (Klimatyzator is chłodzenie)
16. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) **and** (TEMPzewnatrz
17. IF (TEMPwewnatrz is zimno) **and** (TEMPzewnatrz is
18. IF (TEMPwewnatrz is dobrze) **and** (TEMPzewnatrz is
19. IF (TEMPwewnatrz is gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is
20. IF (TEMPwewnatrz is b.gorąco) **and** (TEMPzewnatrz
21. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) **and** (TEMPzewnatrz
22. IF (TEMPwewnatrz is zimno) **and** (TEMPzewnatrz is
23. IF (TEMPwewnatrz is dobrze) **and** (TEMPzewnatrz is
24. IF (TEMPwewnatrz is gorąco) **and** (TEMPzewnatrz is
25. IF (TEMPwewnatrz is b.gorąco) **and** (TEMPzewnatrz

$\mu_{zimno}(Tw=10)=0,4$

$\mu_{b.zimno}(Tw=10)=0,15$

$\mu_{cieplo}(Tz=11)=0,5$

$\mu_{zimno}(Tz=11)=0,2$

Dla realizacji występujących w regułach operacji logicznych:
koniunkcji - **AND** i
implikacji - **IF...THEN**,
wybrano spośród wielu możliwości następujące sposoby definiowania :

Koniunkcja: MIN: $\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$,

Implikacja:

Implikacja Mamdaniego ma postać:

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad .$$

W wyniku procesu agregacji przesłanek 25 reguł 4 z nich (6, 7, 11, 12) otrzymują niezerowe stopnie spełnienia

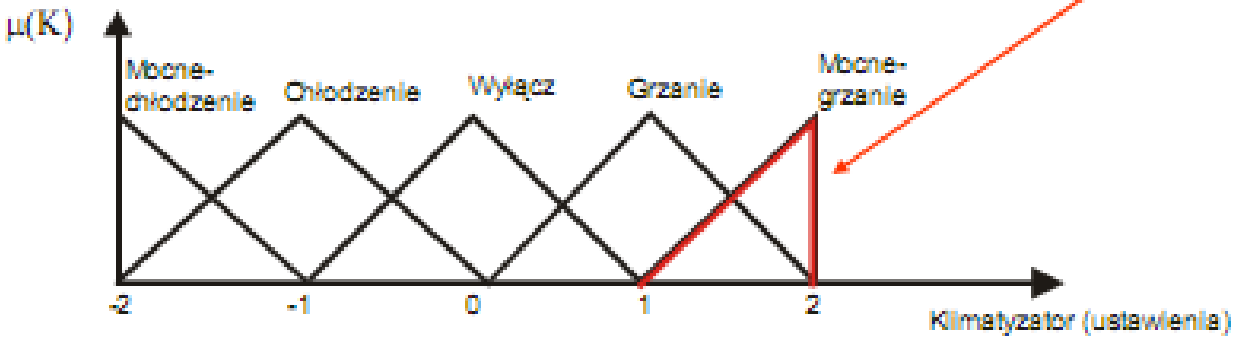
R6. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) and (TEMPzewnatrz is zimno)THEN (Klimatyzator is mocne-grzanie)
R7. IF (TEMPwewnatrz is zimno) and (TEMPzewnatrz is zimno)THEN (Klimatyzator is grzanie)

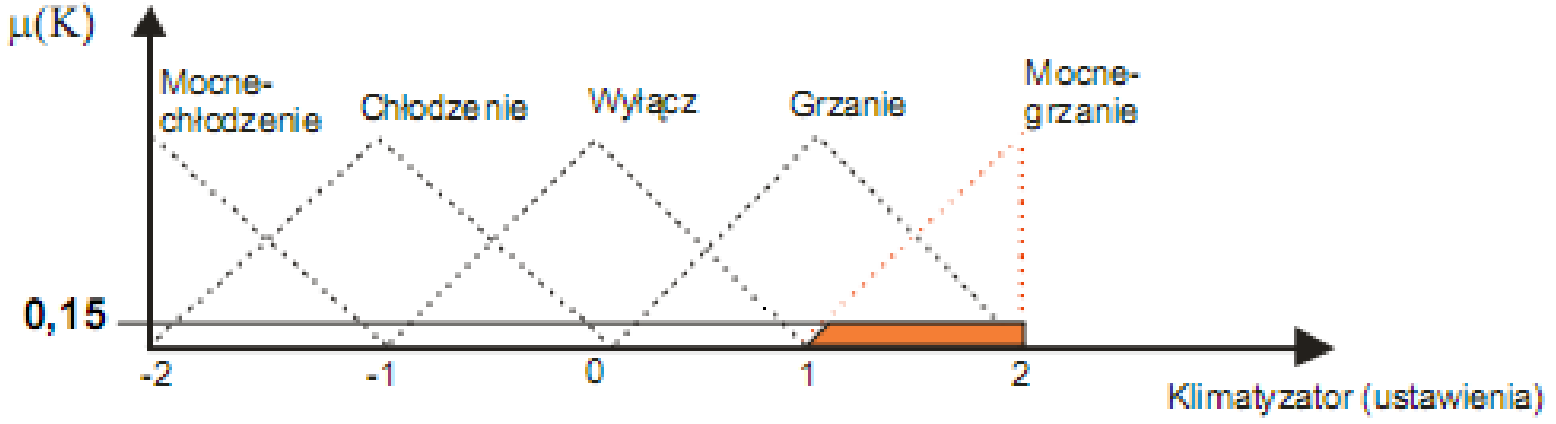
R11. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) and (TEMPzewnatrz is ciepło)THEN (Klimatyzator is grzanie)
R12. IF (TEMPwewnatrz is zimno) and (TEMPzewnatrz is ciepło)THEN (Klimatyzator is grzanie)

Analiza realizacji reguły 6 c.d.

IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) and (TEMPzewnatrz is zimno)THEN (Klimatyzator is mocne-grzanie)

$$\mu_{zimno(Tw)\cap zimno(Tz)} = 0,15$$

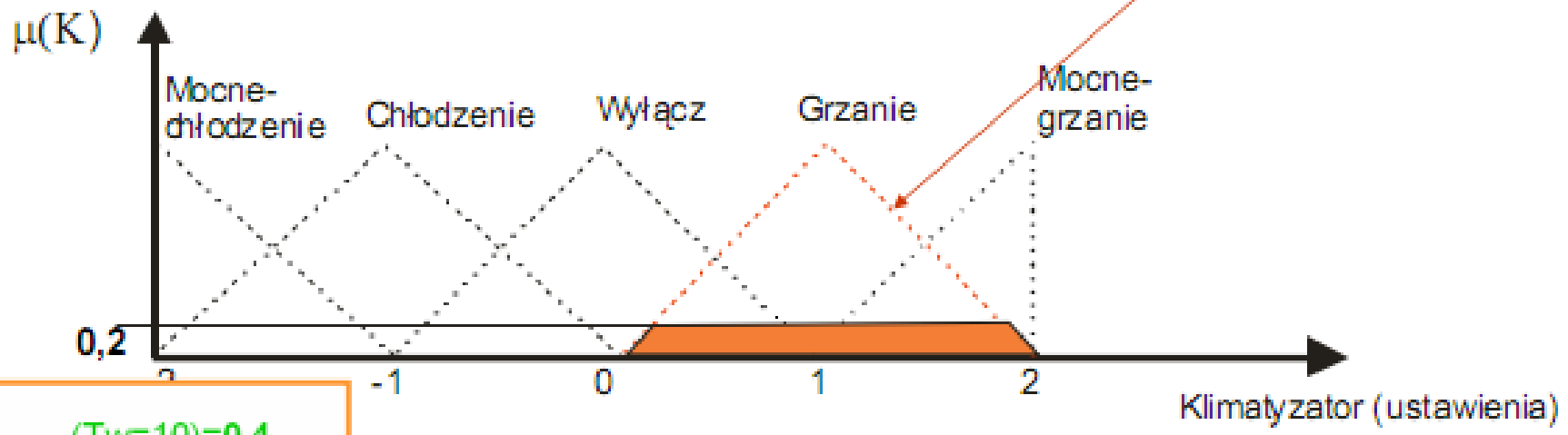




Analiza realizacji reguły 7

R7. IF (TEMPwewnatrz is zimno) and (TEMPzewnatrz is zimno) THEN (Klimatyzator is grzanie)

$\mu_c = \mu_{zimno(Tw) \neg zimno(Tz)} =$
$Min[\mu_{zimno(TEMPwewnatrz)}=0,4 ; \mu_{zimno(TEMPzewnatrz)}=0,2] = \mathbf{0,2}$



$\mu_{zimno}(Tw=10)=0,4$

$\mu_{b.zimno}(Tw=10)=0,15$

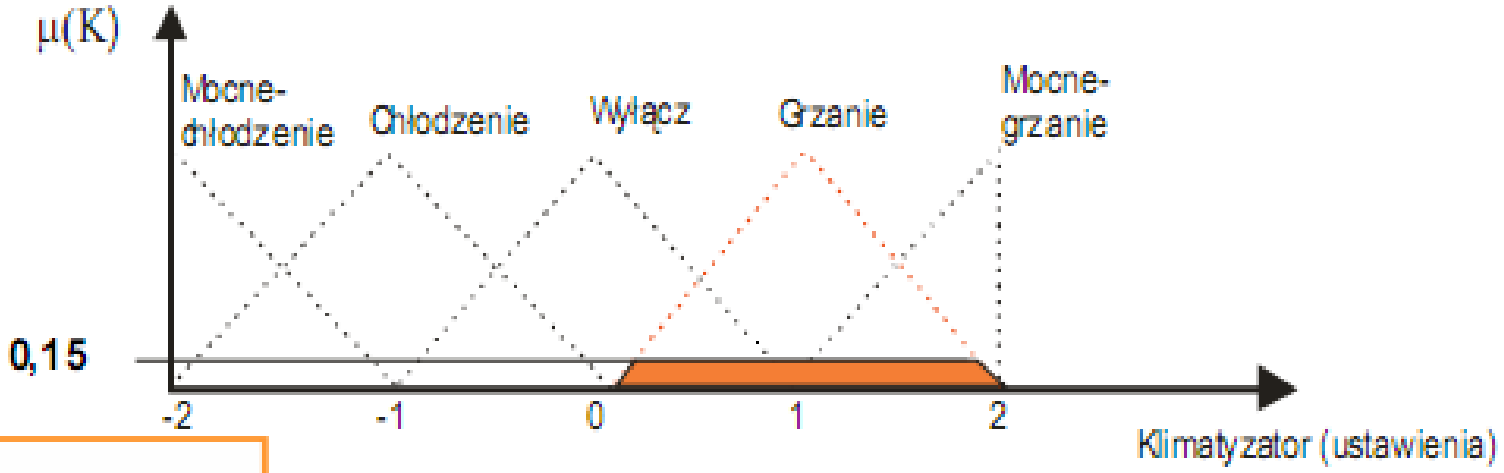
$\mu_{cieplo}(Tz=11)=0,5$

$\mu_{zimno}(Tz=11)=0,2$

Analiza realizacji reguły 11

R11. IF (TEMPwewnatrz is b.zimno) and (TEMPzewnatrz is ciepło) THEN (Klimatyzator is grzanie)

$\mu_{b.zimno(Tw) \cap ciepło(Tz)} = 0,15$



$\mu_{zimno}(Tw=10)=0,4$

$\mu_{b.zimno}(Tw=10)=0,15$

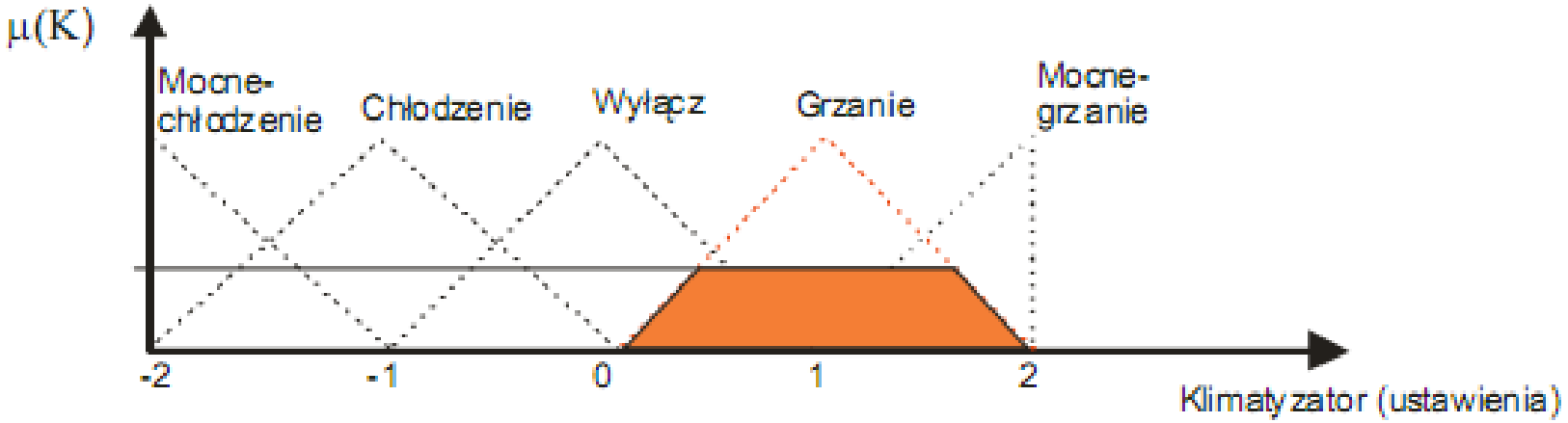
$\mu_{ciepło}(Tz=11)=0,5$

$\mu_{zimno}(Tz=11)=0,2$

Analiza realizacji reguły 12

R12. IF (TEMPwewnatrz is zimno) and (TEMPzewnatrz is ciepło)THEN (Klimatyzator is grzanie)

$$\mu_{b.zimno(Tw) \cap ciepło(Tz)} = 0{,}4$$

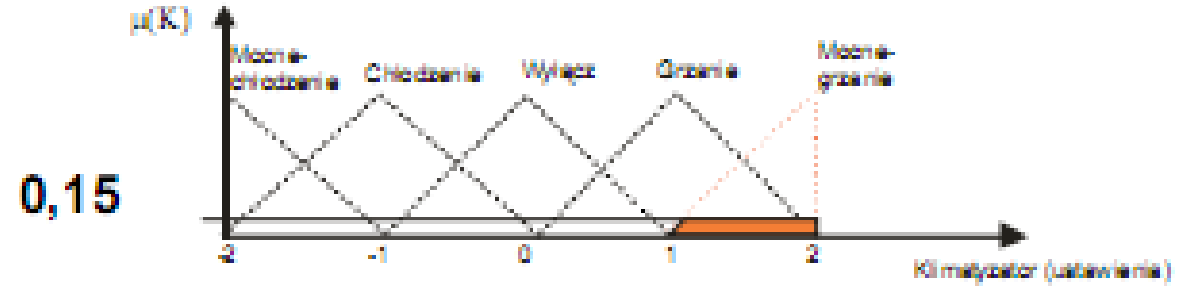


$\mu_{zimno}(Tw=10)=0{,}4$

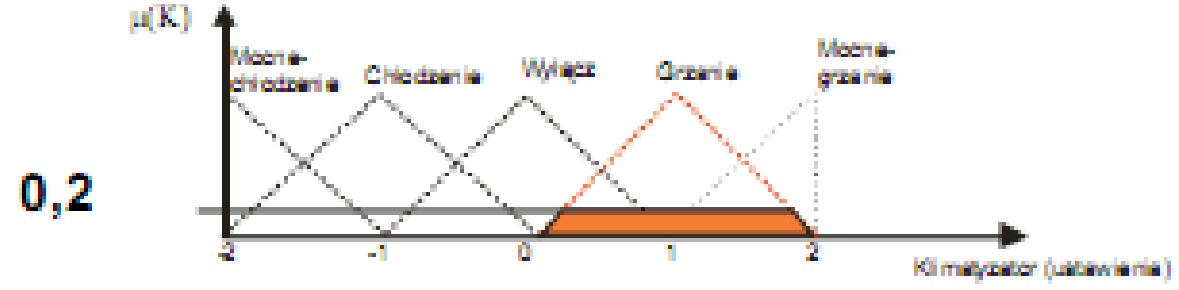
$\mu_{b.zimno}(Tw=10)=0{,}15$

$\mu_{ciepło}(Tz=11)=0{,}5$

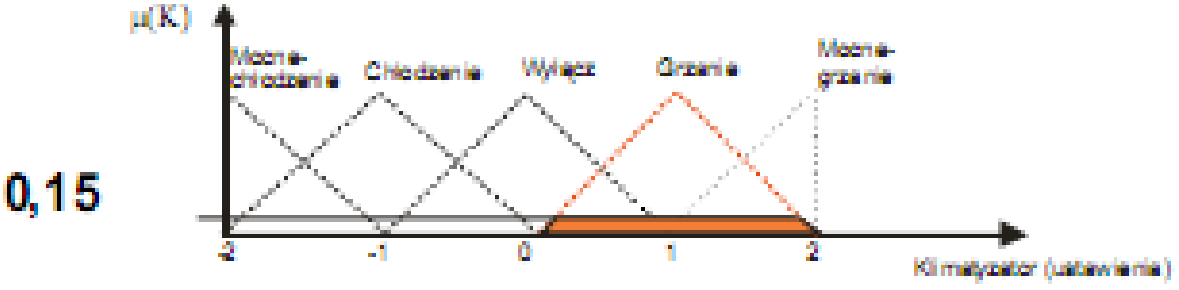
$\mu_{zimno}(Tz=11)=0{,}2$


μ(K)
Mocne-chłodzenie
Chłodzenie
Wyłącz
Grzanie
Mocne-grzanie
-2
-1
0
1
2
Klimatyzator (ustawienia)

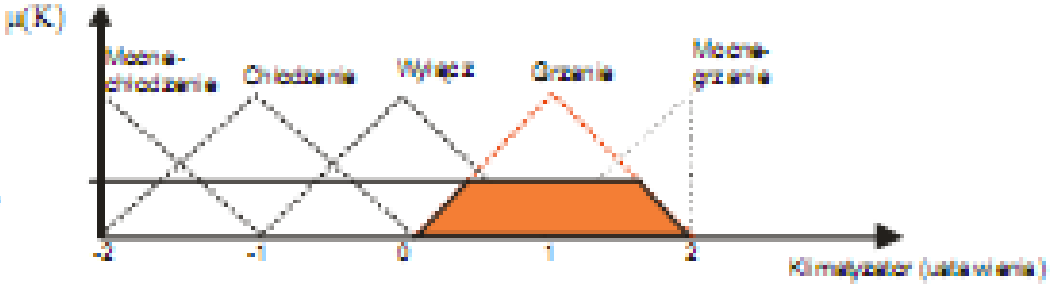
0,15


μ(K)
Mocne-chłodzenie
Chłodzenie
Wyłącz
Grzanie
Mocne-grzanie
-2
-1
0
1
2
Klimatyzator (ustawienia)

0,2


μ(K)
Mocne-chłodzenie
Chłodzenie
Wyłącz
Grzanie
Mocne-grzanie
-2
-1
0
1
2
Klimatyzator (ustawienia)

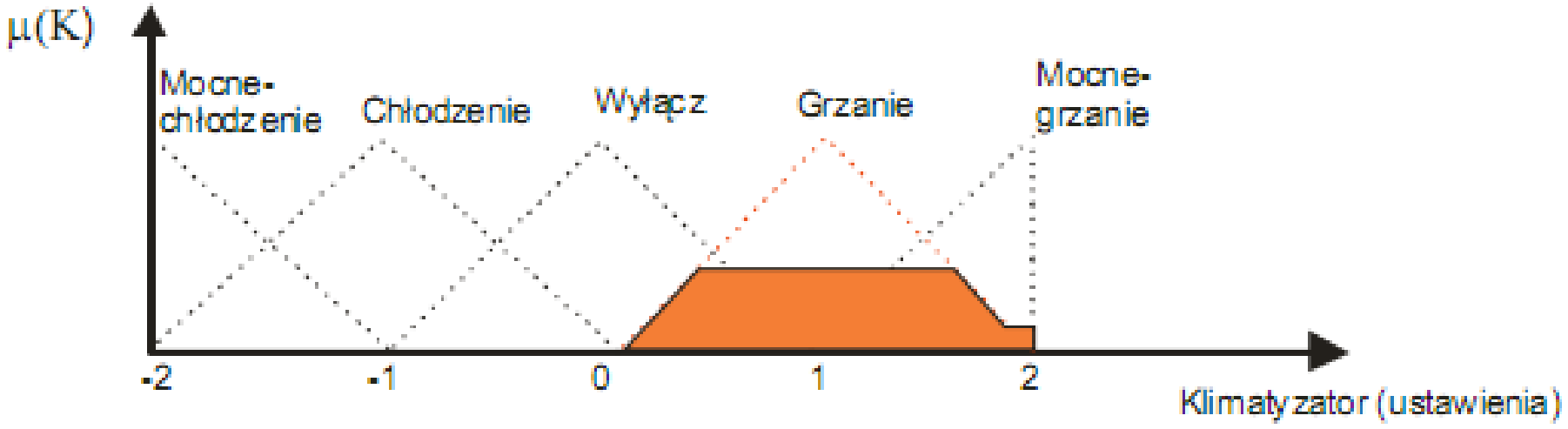
0,15

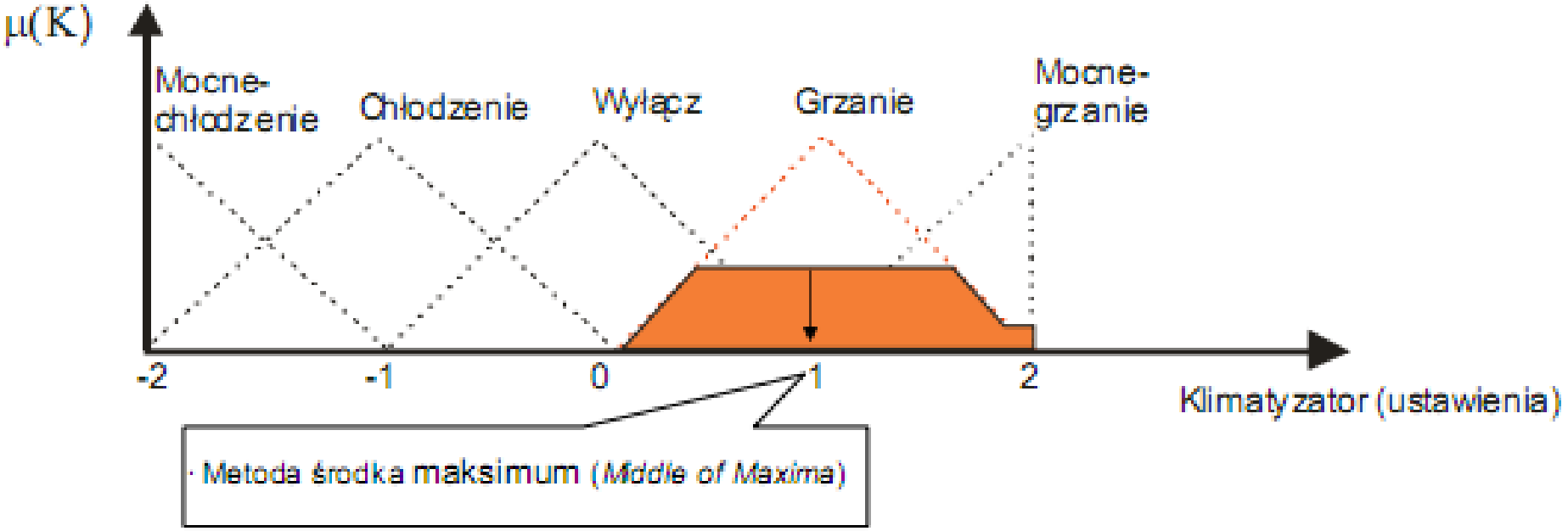

μ(K)
Mocne-chłodzenie
Chłodzenie
Wyłącz
Grzanie
Mocne-grzanie
-2
-1
0
1
2
Klimatyzator (ustawienia)

0,4

Kumulacja- wynikowy zbiór rozmyty

$$\mu_C(x) = Max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$





$\overline{x}_1$

Temperatura wewnątrz domu =10°C

$\overline{x}_2$

Temperatura na zewnątrz domu =11°C

Wnioskowanie Mamdani formalnie

Mając daną następującą bazę wiedzy:

R_1 :	if x is A_1 and y *is* B_1 then z is C_1
also	
R_2 :	if x is A_2 and y *is* B_2 then z is C_2
fact:	x is $\bar{x}_0$ and y is $\bar{y}_0$
Consequence:	z is C

Moc reguł (poziom odpalenia) oznaczana przez $\alpha 1$, $\alpha 2$ obliczana jest jako:

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),\ \alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)$$

Wynik odpalenia (konkluzja) poszczególnej reguły reguły obliczany jest jako:

$$C_1'(w) = (\alpha_1 \wedge C_1(w)),\ C_2'(w) = (\alpha_2 \wedge C_2(w))$$

Całkowita odpowiedź systemu obliczana jest jako sumowanie konkluzji poszczególnych reguł:

$$C(w) = C_1'(w) \vee C_2'(w) = (\alpha_1 \wedge C_1(w)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(w))$$

Wybrane metody wyostrzania

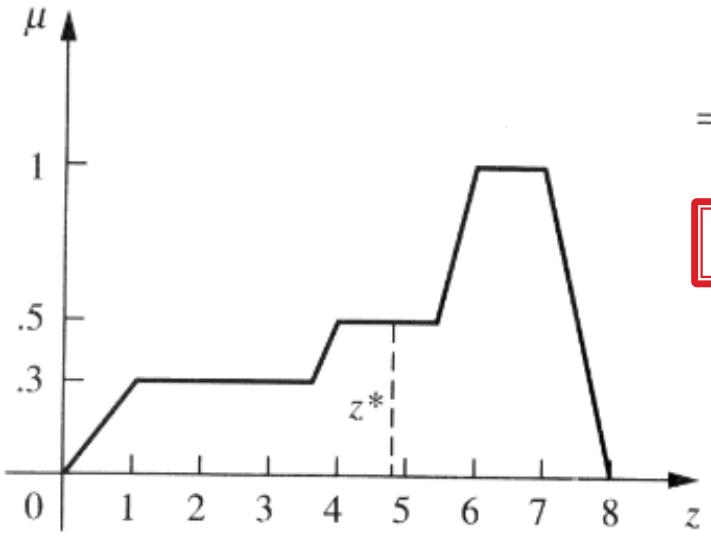
- Metoda środka maksimum (Middle of Maxima)
- Metoda pierwszego maksimum (First of Maxima)
- Metoda ostatniego maksimum (Last of Maxima)
- Metoda środka ciężkości (Center of Gravity)

Center of Gravity (CoG)

$$z^* = \frac{\int \mu_{\tilde{B}}(z) \cdot z \, dz}{\int \mu_{\tilde{B}}(z) \, dz} =$$

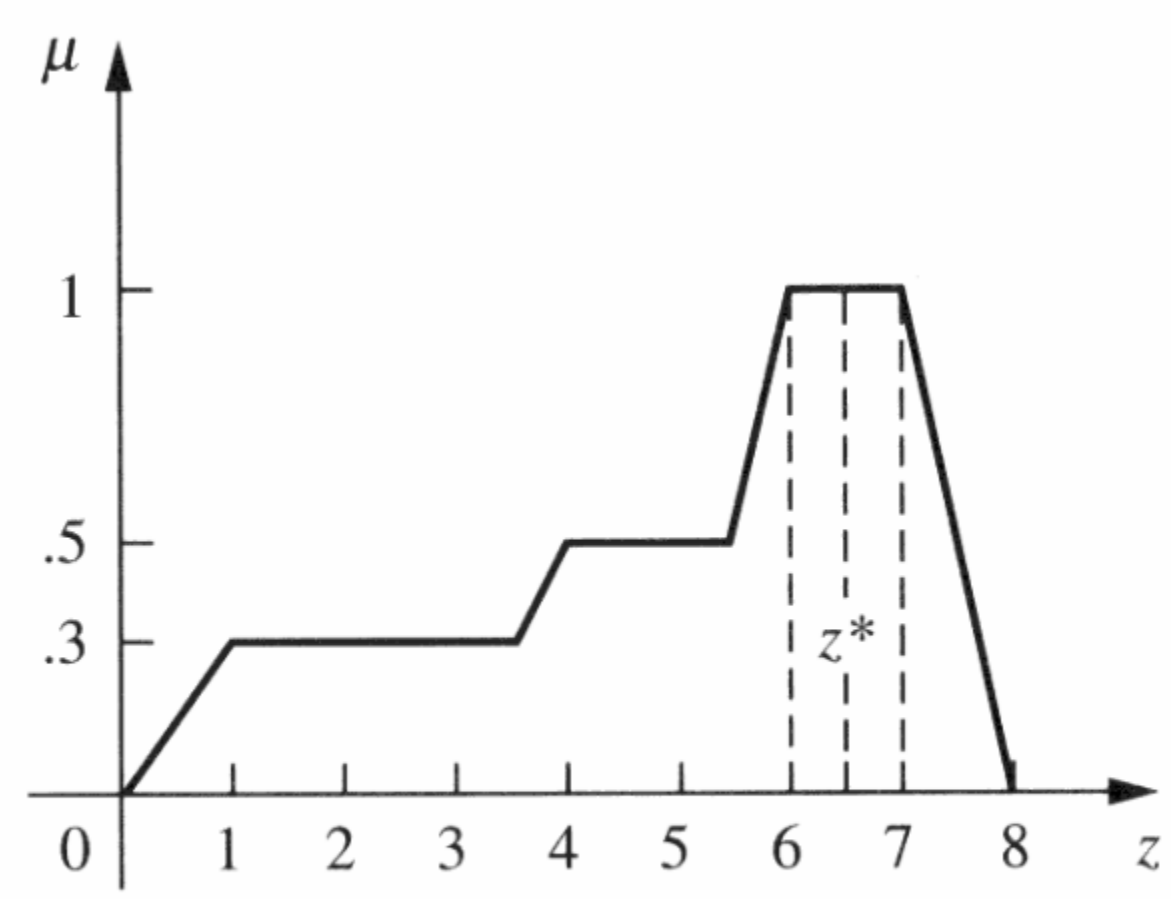
$$\left[\int_0^1 (.3z)z \, dz + \int_1^{3.6} (.3z) \, dz + \int_{3.6}^4 \left(\frac{z-3}{2}\right) z \, dz + \int_4^{5.5} (.5)z \, dz \right.$$
$$\left. + \int_{5.5}^6 (z-5)z \, dz + \int_6^7 z \, dz + \int_7^8 (8-z)z \, dz \right]$$
$$\div \left[\int_0^1 (.3z) \, dz + \int_1^{3.6} (.3) \, dz + \int_{3.6}^4 \left(\frac{z-3}{2}\right) dz + \int_4^{5.5} (.5) \, dz \right.$$
$$\left. + \int_{5.5}^6 (z-5) \, dz + \int_6^7 dz + \int_7^8 (8-z) \, dz \right]$$
$$= 4.9 \text{ meters}$$

Rezultat wnioskowania



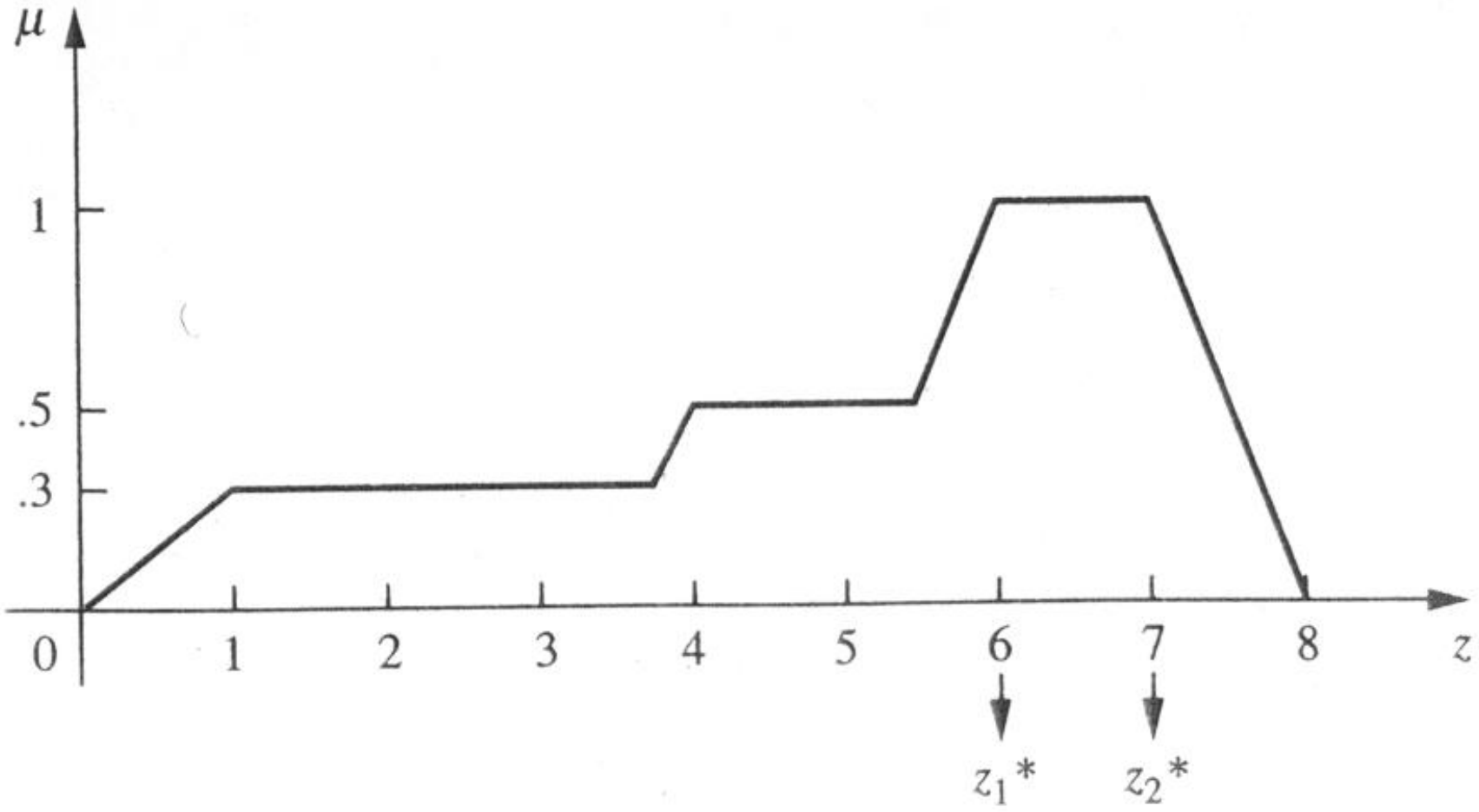
Wyostrzanie metodą środka ciężkości (centroidu)

Metoda środka maksimum



Z* = (6+7)/2 = 6.5

Metoda pierwszego / ostatniego maksimum



Ćwiczenia

- Pobierz plik znajdujący się pod adresem:

http://www.tomaszx.pl/materialy/si_lab3_zad1314.pdf

oraz wykonaj zadania 13 i 14.

- Dla zadań 15 i 16 należy sporządzić szczegółowe sprawozdanie ich rozwiązywania. Są to zadania dodatkowe dla ewentualnego podwyższenia oceny z przedmiotu.